Développement : optimisation dans un Hilbert.

- Lucas Isenmann, Timothée Pecatte, L'oral à l'agrégation de mathématiques [p335] → Ciarlet p175 ~ Ciarlet Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation [p176]

Thm : soient H un espace de Hilbert et $J : H \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, continue et coercive ($J(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$). Alors, il existe $a \in H$ tel que :

$$J(a) = \inf_{x \in H} J(x)$$

En particulier, ce thm assure que l'infimum de J sur H est fini ($\neq +\infty$) et atteint (ce qui n'est a priori pas le cas).

- Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de H telle que $J(x_k) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \inf_H J$.

Supposons par l'absurde que (x_k) n'est pas bornée :

il existerait $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que φ strict. $\nearrow$ et

$\|x_{\varphi(k)}\| \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Par coercivité de J, $J(x_{\varphi(k)}) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui est absurde.

Il existe alors $C > 0$ tel que $\|x_k\| \leq C$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

- Considère la suite u définie par :

Procédé d'extraction diagonale

pour tout $k \in \mathbb{N}$ $u_k = \langle x_0, x_k \rangle$

Par Cauchy-Schwarz : $\forall k \in \mathbb{N}$ $|u_k| \leq |x_0| C$ (par le pt précédent)

Donc u est une suite réelle bornée

Bolzano-Weierstrass : il existe $\varphi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strict. $\nearrow$ telle que $(u_{\varphi_0(k)})_k$ converge.

Par récurrence, supposons avoir construit $\varphi_0, \dots, \varphi_i$ des extractions telles $\langle x_i, x_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_i(k)} \rangle$ converge.

Comme précédemment, la suite $(\langle x_{i+1}, x_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_i(k)} \rangle)$ est bornée donc par B-W, il existe $\varphi_{i+1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(\langle x_{i+1}, x_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_{i+1}(k)} \rangle)$ converge.

On crée donc comme cela une suite d'extractions $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$

On définit alors la fonction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$k \mapsto \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_k(k)$

Ainsi $(\langle x_i, x_{\psi(k)} \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$ converge pour tout i car c'est une sous suite de $(\langle x_i, x_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_i(k)} \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$

Par linéarité, si l'on pose $F := \mathrm{Vect}(x_p, p \in \mathbb{N})$,
alors $(\langle v, x_{\psi(k)} \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$ converge pour tout $v \in F$.

• On définit la suite y par $y_k = x_{\varphi(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. y est une suite de H.

Comme H est un espace de Hilbert, $H = \overline{F} \oplus F^{\perp}$.

Montrons que pour tout $u \in H$, la suite $(\langle u, y_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

Soit $u \in H$ et $\varepsilon > 0$. Notons $u = \underbrace{v}_{\in \overline{F}} + \underbrace{w}_{\in F^{\perp}}$ et $\tilde{v} \in F$ tel que $\|v - \tilde{v}\| < \varepsilon$

Pour tous entiers k et l, on a :

$$|\langle u, \underbrace{y_k - y_l}_{\in F}\rangle| = |\langle v, y_k - y_l\rangle| \leq \|v - \tilde{v}\|\|y_k - y_l\| + |\langle \tilde{v}, y_k - y_l\rangle|$$

Comme la suite $(\langle \tilde{v}, y_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, elle est de Cauchy. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$, pour tous $k, l \geq N$ $|\langle \tilde{v}, y_k - y_l\rangle| \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $k, l \geq N$

$$|\langle u, y_k - y_l\rangle| \leq \|v - \tilde{v}\| \underbrace{\|y_k - y_l\|}_{\leq \underbrace{\|y_k\|}_{\leq C} + \underbrace{\|y_l\|}_{\leq C}} + |\langle \tilde{v}, y_k - y_l\rangle| \leq 2C\varepsilon + \varepsilon$$

On en déduit que la suite $(\langle u, y_k\rangle)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet.

Ainsi, il existe $l_u \in \mathbb{R}$ tel que $\langle u, y_k\rangle \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} l_u$

On définit $f : H \to \mathbb{R}$, $u \mapsto l_u$ cette limite

Par linéarité de la f^n $x \mapsto \langle x, y_k\rangle$ de H dans $\mathbb{R}$, et par unicité de la limite d'une suite cv, f est une forme linéaire

De plus, par Cauchy-Schwarz, $|f(u)| \leq C\|u\|$: f est continue.

Par le thm de Riesz, il existe $a \in H$ tel que $f(u) = \langle a, u\rangle$ pour tout $u \in H$.

Ainsi, pour tout $u \in H$, $\langle u, y_k\rangle \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \langle u, a\rangle$

. Il reste à montrer que le minimum de J sur H est atteint en a.

Pour $\beta > \inf_H (J)$, on définit $C_\beta = \{x ; J(x) \leq \beta\}$

C_β est un convexe fermé non vide (J convexe et continue), la distance à C_β d'un point $x \in H$ est toujours atteinte en un unique point. Thm de projection sur les convexes fermés

On note $p : H \to C_\beta$ l'application de projection sur C_β.

Comme $J(x_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \inf_H J$, on a aussi $J(y_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \inf_H J$

Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq N$ $y_k \in C_\beta$. (coquille livre?)

Et donc pour tout $k \geq N$ $\langle y_k - p(a), a - p(a)\rangle \leq 0$

Or $\langle y_k, a - p(a)\rangle$ converge vers $\langle a, a - p(a)\rangle$

Donc on en déduit que $\|a - p(a)\|^2 \leq 0$

D'où $a = p(a)$ et $a \in C_\beta$. ↓ déf de C_β

Ainsi $J(a) \leq \beta$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\beta > \inf_H (J)$

Donc $J(a) = \inf_H (J)$

□